

CSAPÓ BENŐ

A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában

Előző írásomban (Csapó B., 1987) a műveleti képességek iskolai fejlesztésével kapcsolatos kísérlet fontosabb célkitűzéseit foglaltam össze. Ebben a tanulmányban a *kombinatív képesség fejlesztésére alkalmas feladatokat és a fejlesztés lehetőségeit* fogom bemutatni. Természetesen egy ilyen rövid írás keretei között csak az alapelvek felvázolására és illusztrációként néhány példa ismertetésére vállalkozhatom.

Mielőtt a fejlesztés lehetőségeit elemeznénk, meg kell ismerkednünk a kombinatív képesség és a kombinatív műveletek fogalmával. Ezután a fejlesztés lehetőségeit illusztráló példákat háromféle elv szerint csoportosítva elemezzük. Először azt nézzük meg, hogy a kombinatív műveletek milyen szerepet tölthetnek be a gondolkodásban, és ezáltal hogyan vehetnek részt az adott tantárgyi problémák megoldásában. Másodikként a feladat struktúrája lesz a rendező elv. Azt elemezzük, hogy a különböző tantárgyakban különböző problémákat kiválasztva, hogyan lehet ugyanannak a műveletnek a fejlesztésére megegyező struktúrájú feladatokat készíteni és ezáltal az adott struktúra általánosítódását segíteni. Harmadszor a kísérletbe bevont tantárgyakra mutatunk be további jellegzetes feladatokat.

A KOMBINATÍV KÉPESSÉG ÉS A KOMBINATÍV MŰVELETEK

Már a korábbi századok filozófusait is foglalkoztatta az a probléma, hogyan képes az emberi gondolkodás olyan új dolgokat kitalálni, amelyek a valóságban eddig nem léteztek. A kérdés egyik első, alapos tanulmányozója, a matematikus-filozófus *Descartes* a kombinatorikában látta azt a matematikai módszert, amely az új alkotások létrehozására alkalmas univerzális eszköz lehet. Bár tudjuk, hogy a kombinatorika önmagában nem alkalmas új alkotások létrehozására, *Descartes* alapvető elgondolásai különböző formában többször is visszatérnek az emberi alkotóképesség értelmezésére irányuló elméletekben.

Az alkotóképesség a XX. század közepe táján vált a pszichológia egyik divatos kutatási területévé. A különböző vizsgálatok kiderítették, hogy az alkotóképességnek nagyon sok összetevője van. Ezek között feltétlenül jelen kell lennie az ötletek gazdagságának, a sokféle változat felvetésére való képességeknek, a változatok könnyed elősorolásának, a lehetőségek, feltételek variálásának, kombinálásának.

Az emberi gondolkodás sajátosságainak és a matematikai kombinatorikának az alaposabb összevetésével kiderül, hogy két egészen különböző rendszerről van szó. Viszont — ahogy a legtöbb matematikai diszciplína — a

kombinatorika is a természetes, mindennapi emberi gondolkodásból nőtt ki, és így a legelemibb mozzanatokat, gyökereiket tekintve, vannak közös vonásaik is. Vannak olyan egyszerű, az összes lehetőség számbavételére, felsorolására alkalmas kombinatorikai szerkezetek, amelyek valamilyen színvonalon mindenkiben kialakulnak. A mindennapi tevékenységek, a hétköznapi gondolkodás révén minden különösebb speciális iskolai tanulás nélkül is gondolkodásunk integráns részévé válnak. A gondolkodásnak ezeket a meghatározott szerkezettel rendelkező sémáit nevezzük *kombinatív műveleteknek*. A művelet fogalmát itt nem a matematikai értelemben használjuk, hanem abban a jelentésében, amely *Piaget* munkássága nyomán terjedt el a pszichológiai irodalomban.

A kombinatív képesség a gondolkodás egyik legfontosabb műveleti rendszerét foglalja magában. E képesség kialakulása teszi az embert alkalmassá arra, hogy *dolgokból, elemekből változatos együtteseket, összeállításokat hozzon létre, hogy megtárlja az adott feltételeknek megfelelő összes különböző lehetőséget*. A mindennapi problémamegoldásban, az iskolai tanulásban éppen úgy jelen van, mint a tudományos gondolkodásban. Az alkotóképesség, a kreativitás egyik legfontosabb összetevője.

Előzetes vizsgálataink során összegyűjtöttük és rendszerbe foglaltuk azokat a műveleteket, amelyek pszichológiai és matematikai megfontolások alapján a kombinatív képesség központi magját, műveleti rendszerét alkothatják. Összesen nyolc különböző műveletet vettünk számításba, és ezeknek 37 számértékben különböző műveleti struktúrájára alapozva végeztük el a vizsgálatokat. (A kombinatív műveleti képesség elméleti elemzését (l. *Csapó B.* 1979; a műveletek és a feladatstruktúrák megtalálhatók: *Csapó B.*, 1983; a szerkezetre és fejlődésre vonatkozó adatok összefoglalása: *Csapó B.*, 1984.) A feladatrendszer kidolgozása során ugyanezeket a műveleti struktúrákat vettük alapul.

A kombinatív műveleti képesség működése révén meghatározott kiinduló elemekből összeállítjuk a feltételeknek megfelelő együtteseket. Ha az adott művelet teljesen kifejlődött, képesek vagyunk az összes lehetséges eset felsorolására. Ha az adott művelet nem alakult ki, az összes lehetőségnek csak bizonyos hányadát tudjuk előállítani.

A KOMBINATÍV MŰVELETEK SZEREPE A GONDOLKODÁSBAN

A kombinatív képesség sokféle módon beépül gondolkodásunkba. A következőkben négy fontosabb funkcióját fogjuk körüljárni, melyek a gondolkodás során természetesen nem ennyire elkülönülten, tiszta formában vannak jelen, mint ahogy analízisünk eredményeként ezeket megsejlemlélhetjük.

Az illusztrációra felhasznált példák mindegyikének „alapanyaga” az iskolai tananyag, a tananyagban azonban a feladatoknak csupán az elemei vannak meg. Az ilyen elemeknek, lehetőségeknek a felismerése, megtalálása, az elemek összerakása vagy átrendezése már a kísérlethez szükséges feladatkészítő munka része.

Az összes lehetőség számbavétele

A kombinatív műveletek egyik legkézenfekvőbb funkciója a bizonyos feltételeknek megfelelő összes lehetséges összeállítás számbavétele, felsorolása. Már a matematikai kombinatorika egyik alapfeladata a lehetőségek, esetek számbavétele, felsorolása volt. Természetesen a gyakorlatban csak akkor tudjuk (és többnyire akkor szükséges) az összes lehetőséget felsorolni, ha azok száma nem túlságosan nagy. Akadnak azonban ilyen problémák is bőven.

Az oktatás során például akkor lehet szükség az összes lehetőség számbavételére, ha össze akarjuk foglalni, együtt akarjuk látni az adott osztályba besorolható dolgok, jelenségek minden típusát. Ezt például egy témakör tárgyalása előtt tehetjük meg, hogy kijelöljük a tanulmányozandó területeket, vagy éppen a végén, összefoglalásként, annak ellenőrzésére, hogy nem hagytunk-e ki valamit.

Illusztráljuk ezt a helyzetet a kémiából vett egyik példával.

Az egymással reagáló anyagok különböző halmazállapotúak lehetnek: szilárd, folyékony vagy gáz halmazállapotban reagálhatnak egymással. Vegyük sorna, hogy ha két anyag reagál egymással, a halmazállapotok milyen kombinációi fordulhatnak elő! A következő esetek adódnak:

szilárd — szilárd	folyékony — folyékony
szilárd — folyékony	folyékony — gáz
szilárd — gáz	gáz — gáz

Ha csak a fenti három kiindulási elemünk van, akkor pontosan ezt a hat kombinációt kapjuk, nem többet, nem kevesebbet. Rendben felsorolva meggyőződhetünk arról, hogy nem hagytunk ki semmit. Ez a felsorolás az egyik legegyszerűbb kombinatív művelet működését igényli: ismétléses kombinációkat kell képeznünk. Ha a halmazállapot szempontjából különböző reakciók tárgyalása előtt elvégezzük ezt a számbavételt, akkor ez lehetőséget kínál az adott kombinatív művelet fejlesztésére, a struktúra általánosítására. De ad-e valami többletet a kémia tanítása szempontjából? Valószínűleg igen. Itt ugyanis a felsorolás egy olyan reakcióval kezdődik, amelyik egészen ritka. Nem teljesen kizárt ugyan, hogy szilárd anyagok reagáljanak egymással, de csak kevés anyag és egészen speciális körülmények között képes ilyen reakcióra. Mivel egészen ritka és gyakorlati szempontból nincs jelentősége, nem is szerepel a könyvben. De éppen annak elemzésével, hogy miért nem reagálnak egymással szilárd anyagok (a reakciófelület hiánya), értjük meg, miért lehet gyors, esetleg robbanásszerű a reakció folyadékok, illetve gázok között.

Az összes lehetőség számbavétele akkor lehetséges a kombinatív műveletek segítségével, ha vannak bizonyos jól definiálható elemek, amelyeknek az összeállításait szabályos rendben fel lehet sorolni. Az összes lehetőség áttekintése, a különböző esetek azonosságainak és különbözőségeinek elemzése segíti az egyediségükben különböző jelenségek mögött meghúzódó általános törvényszerűségek felismerését és bemutatását.

A szokatlan kapcsolatok felszínre hozása

Sok pszichológus szerint az alkotóképesség egyik legfontosabb összetevője: a távoli asszociációkra való képesség, az egymástól távoli jelenségek, dolgok szokatlan kapcsolatba hozása. Kidolgoztak gyakorlatokat, tevékenységeket is ennek a képességnek a fejlesztésére, illetve tanulmányozták, melyek azok a feltételek, amelyek a távoli asszociációk felszínre hozását segítik. A szokatlan kapcsolatoknak, elgondolásoknak, jó ötleteknek gyakran közvetlen gyakorlati haszna is van. Többek között az eredeti kapcsolatok, jó ötletek felszínre hozására alkalmazzák a „brain storming” (agyfacsarásként szokták fordítani) jellegű munkaformát: szakértők egy csoportja összeül valamilyen probléma megoldására, és mindenkinek az a feladata, hogy fesztelenül, gátlások nélkül mondja el azt, ami a felvetett kérdésekkel kapcsolatban eszébe jut, nem elhallgatva a legképtelenebb ötleteket, elgondolásokat sem, sőt éppen törekedve a szokatlanra.

A szokatlan kapcsolatok felszínre hozását segíthetik a kombinatív műveletek is. Az egyik lehetséges megoldás például a különböző rendszerezési,

csoportosítási szempontok kombinálása. Szemléltessük ezt egy egyszerű, a hetedik osztályos kémia tankönyvből vett példával. A tankönyv felsorolja az anyagok néhány lehetséges csoportosítási szempontját. Így többek között vannak: fémek, ásványok, energiaforrások, tápanyagok, éghető anyagok. Kombináljuk ezeket a csoportokat, és nézzük meg, mit kaptunk az összekapcsolások eredményeként! Milyen viszonyban vannak egymással az egymás mellé került halmazok, mit tudunk elmondani a kapcsolatáról?

A következő felsorolás adódik:

fémek — ásványok	ásványok — tápanyagok
fémek — energiaforrások	ásványok — éghető anyagok
fémek — tápanyagok	energiaforrások — tápanyagok
fémek — éghető anyagok	energiaforrások — éghető anyagok
ásványok — energiaforrások	tápanyagok — éghető anyagok

Az összes lehetőség felsorolása ebben az esetben ismétlés nélküli kombinációk képzését igényli. A feladat szerkezete egyszerűbben áttekinthető, ha betűkkel jelöljük a felhasználható elemeket: A, B, C, D, E. A felsorolás ebben az esetben a következő lesz: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Ezt a műveleti struktúrát lehet tehát fejleszteni, ha az előző feladatot megoldjuk. De hogyan segít ebben a konkrét esetben a kombinativitás a szokatlan kapcsolatok létrehozásában?

A felsorolt tíz kapcsolat között találunk olyanokat, amelyek nem szokatlanok (pl. a fémek ásványai vagy az éghető energiaforrások), amelyekkel gyakran találkozunk, amely kapcsolatokról sok mindent tudunk. Viszonylag szokatlan például a tápanyag-energiaforrás, és jó ürügyet szolgáltathat arra, hogy a szervezet energiaforrásairól, a tápanyagokról és azok kapcsolatairól gondolkozzunk. Hasonlóképpen a fémek—éghető anyagok kapcsolat alapján lehet példákat gyűjteni arra, hogy mely fémek milyen feltételek mellett hogyan égnék. Talán még szokatlanabb a fémek—tápanyagok kapcsolat, amely ugyancsak fontos kérdések megbeszélésére kínál alkalmat: bizonyos fémek sóira a szervezetnek elengedhetetlenül szüksége van, mások mérgező hatásúak. És mindegyik kapcsolatra gyűjtött példát, megállapítást számtalan „miért?” követheti.

A tankönyvek szükségszerű lineáris felépítésük miatt szépen sorra veszik a megtanítandó információkat. Természetesen a tananyagnak ebben a lineáris elrendezésében is számtalan kapcsolat jön létre a különböző fogalmak között: egyesek többször is visszatérnek, különböző összefüggésrendszerbe, kontextusba ágyazva. A fogalmakat azonban éppen a kapcsolataik határozzák meg, *egy fogalom fejlettsége, tartalma éppen attól függ, milyen gazdag a kapcsolatrendszer*. Ezért még a tananyag különböző részei között levő, nem is feltétlenül szokatlan kapcsolatok kiépítése is segíti a tudás elmélyítését.

Talán ebből a megjegyzésből is kiderült, hogy egyetlen feladat is mennyi alkalmat kínál fontos információk teljesen újszerű összerendezésére. Akár egy ilyen feladat köré egy egész tematikus egység teljes tananyaga felépíthető lenne. Természetesen éppen ezért az órán nincs mindig arra idő, hogy a létrehozott kapcsolatrendszer minden ágát részletesen elemezzük, de erre talán nincs is szükség. Céljainktól, az adott tananyag rész, problémakör jellegétől függően néhány fontos vagy szokatlan kapcsolat kiemelése is segítheti azt, hogy a fogalmak kapcsolatrendszer gazdagodjon, a gondolkodás nyitottabbá váljék.

A fantázia, az alkotó képzelet működési mechanizmusait nem ismerjük pontosan, így nem is javasolhatunk végleges megoldásokat a fejlesztésére. Az azonban bizonyos, hogy több kiinduló elem és bonyolultabb összeállítások ese-

tén nem az igen nagyszámú lehetőség módszeres előállításával és azok szisztematikus elemzésével jönnek létre az eredeti alkotások. Az új alkotások létrehozásában a kombinatív műveletek valószínűleg az értékelés, szelektálás, válogatás műveleteivel együtt vesznek részt. Ezek egymást váltogatva hoznak létre néhány elemből viszonylag kisszámú összeállítást, majd ezek közül szelektálva haladunk tovább a legígéretesebb utakon. Újabb elemeket, feltételeket bevonva ismét a lehetőségek áttekinthető mennyiségét hozzuk létre, amelyet ismét szelekció követ és így tovább. Természetesen nem valami tudatos erőfeszítésről lehet itt szó, hanem sokkal inkább a gondolkodás csapongása, a gondolatok burjánzása mögött meghúzódó öntudatlan mechanizmusokról.

Igen, ha a képzelet konkrétan megragadható, leírható folyamatait keressük, ismét csak mechanizmusokra, sémákra, műveletekre gondolhatunk. Bármilyen paradox is, de ha azt akarjuk, hogy rutint szerezzünk a mindennapos sémák meghaladásában, nem tehetünk mást, mint sémákat alakítunk ki a sémákból való kilépésre.

A létező, a lehetséges és az elgondolható megkülönböztetése

A bennünket körülvevő világ közvetlen megismerése során mindig a reálisan létező dolgokkal találkozunk. Azt látjuk magunk körül, hogy az ég kék, a fű zöld, az elengedett tárgyak lefelé esnek; a lovak lábakkal, a madarak szárnyakkal közlekednek; a halak kopoltyúval, az emlősök tüdővel lélegeznek. Megtanuljuk, és aztán tudjuk, hogy így van. Természetessé válik számunkra. (Mint ahogy mindez nem természetes a gyerekeknek: figyeljük meg, a létezőnél mennyivel gazdagabb világokat rajzolnak le!)

Az elgondolható dolgok, jelenségek köre azonban sokkal tágabb, mint a létezőké. Ki tudunk találni olyan dolgokat is, amelyek nem léteznek: például szárnyas lovat. Az elgondolható és a létező közötti terület számunkra a legizgalmasabb: ez a lehetséges dolgok köre. E három szféra két határfelületén tevékenykedik az emberi civilizáció két fontos része, a tudomány és a technika. A tudomány által feltárt törvények jelölik ki, mi az, ami az elgondolhatóból lehetséges, a technika pedig a lehetséges, megvalósítható dolgok köréből egyre többet hoz a létezők világába. E szférák közötti különbségtételre, a határfelületek megismerésére és megismertetésére ugyancsak alkalmasak a kombinatív műveletekre alapozott feladatok. Nézzünk erre egy egyszerű példát.

A napfogyatkozás és a holdfogyatkozás érdekes csillagászati jelenségek. Akkor következnek be, ha a három égitest egy egyenes mentén helyezkedik el. Soroljuk fel a Föld, Hold és a Nap szavakat az összes lehetséges sorrendben! Jelöljük meg, hogy ezek közül a sorrendek közül a valóságban melyek nem lehetségesek, melyiknél lehet holdfogyatkozás, melyiknél napfogyatkozás!

Föld Hold Nap — napfogyatkozás
 Föld Nap Hold — nem lehetséges
 Hold Föld Nap — holdfogyatkozás
 Hold Nap Föld — nem lehetséges
 Nap Föld Hold — holdfogyatkozás
 Nap Hold Föld — napfogyatkozás

Ez a felsorolás három elem összes ismétlés nélküli permutációjának képzését követeli meg. (Betűkkel: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.) Mint látjuk, az elgondolható esetek száma hat, a lehetségeseké csak négy. Rövid gondolkodás után a tanulók rájönnek arra, hogy a hatból csak három eset különbözik lényegesen, mivel a lényeg, hogy melyik égitest van középen. Az pe-

dig, hogy a Nap a Föld és a Hold között legyen, lehetetlen. A lehetséges és lehetetlen megkülönböztetése ebben az esetben az egész Naprendszer szerkezetének átlátását igényli, ezáltal a törvényszerűségek megértését segíti.

Teljes rendszerek képzése

Ha különböző dolgokat rendszerezni akarunk, akkor mindenekelőtt magát a rendszert kell megalkotnunk, amelybe azután a dolgokat bele lehet helyezni. Ha a dolgokat csak egy szempont szerint kell elrendeznünk, akkor a helyzet viszonylag egyszerű. Rögtön bonyolultabbá kezd válni a rendszer kialakítása, ha kettő vagy annál is több rendszerezési szempontunk van. Több szempontot érvényesítő rendszer létrehozására többnyire az egyik legegyszerűbb kombinatorikai művelet, a Descartes-féle szorzatok képzése szolgál.

Lássunk erre az esetre egy egyszerű példát a kémia tankönyvből. Alkalmazzuk egyszerre az anyagi változások csoportosításának kétféle szempontját:

minősége szerint lehet: oldás, halmazállapot-változás, kémiai reakció;

a belső energia változása szerint lehet: exoterm, endoterm.

A két szempontot összekapcsolva, a következő lehetőségek adódnak:

endoterm oldás

exoterm halmazállapot-változás

exoterm oldás

endoterm kémiai reakció

endoterm halmazállapot-változás

exoterm kémiai reakció

A feladatban a két szempontnak megfelelően kétféle kiinduló elemünk van, jelöljük az egyiket betűkkel: A, B; a másikat számokkal: 1, 2, 3. Ennek megfelelően a felsorolás a következő lesz: A1, A2, A3, B1, B2, B3. Általában ilyen egyszerű rendszer kialakítása nem is okoz nehézséget. Két szempontnál maradva, még akkor is viszonylag jól megoldják a tanulók a problémát, ha az egyes szempontok szerint sokféle esetet megkülönböztetünk. Három szempont esetén a 14 éves tanulók jelentős részénél már problémák adódnak.

A kombinatív műveletek ezen a ponton szorosan kapcsolódnak a rendszerezési képesség műveleteihez. Az alapvető különbség az, hogy amíg a kombinatív műveletek segítségével magát a rendszer szerkezetét hozzuk létre, a rendszerezés műveletei az egyes dolgoknak a rendszerbe való besorolását szolgálják (bővebben l. Nagy J., 1987).

A rendszerezés konkrét tantárgyi szerepe, haszna nem kétséges. A rendszerezett ismeretek könnyebben megtanulhatók, mélyebben rögződnek, mint a különálló tudáselemek.

Az egyes szempontok szisztematikus összekapcsolásának, a rendszeralkotásnak növekszik a jelentősége, ha nem egyszerű, könnyen áttekinthető táblázatokról van szó, hanem bonyolultabb konstrukciókról, alkotásokról, amelyeknek a belső szerkezete, gondolati rendje biztosítja egyben azt is, hogy egységes egészet képezzen. Gondoljunk például egy földrajz könyvre! Mondanivalónkat elrendezhetjük úgy is, hogy a tájegységeket emeljük ki, ezek alkotnak egy-egy fejezetet, és ezeken belül, az alfejezetekben vesszük sorra az ipart és a mezőgazdaságot. Megtehetjük persze fordítva is: az ipart és a mezőgazdaságot emeljük ki önálló fejezetekként, majd ezeken belül haladunk végig tájegységeként. Hogy melyiket választjuk, azt a konkrét szakmai igények döntenek el. De mind a mondanivaló elrendezését, mind pedig az olvasó számára az áttekintést és befogadást segíti, ha az írásműnek szigorú belső rendje van.

AZONOS KOMBINATÍV MŰVELETEKHEZ KÉSZÍTETT KÜLÖNBÖZŐ FELADATOK

A kombinatív műveletek különböző konkrét szituációk, feladatok közös szerkezeti sajátosságainak általánosítódása révén alakulnak ki. Ahhoz, hogy a műveletek széles körben valóban működőképesek legyenek, sokféle helyzet megoldása során alkalmazni tudjuk őket, arra van szükség, hogy ugyanazzal a művelettel a tanulók minél több különböző konkrét tartalomba ágyazva találkozzanak. A következő néhány feladat arra szolgálhat példaként, hogy hogyan lehet a különböző tantárgyi tartalmakat felhasználva, ugyanarra a műveleti struktúrára feladatokat készíteni. Az előzőekben már bemutattuk azt, hogy az egyes kombinatív műveletek működése hogyan segíti a gondolkodást, és a feladatok a kombinatív műveletek fejlesztésén túl hogyan járulhatnak hozzá a tantárgy eredményesebb elsajátításához, ezért itt már eltekinthetünk a feladatok részletes elemzésétől. A példákat a hetedik osztályos fizika- és kémia-tankönyvekből vettük.

A kombinatív művelet, amelyet fejleszteni akarunk, legyen ebben az esetben az egyik legáltalánosabb és leggyakrabban előforduló szerkezet: halmaz részhalmazainak képzése. Ennek is vegyük azt az egyszerű esetét, amikor a halmaz mindössze három elemet tartalmaz. Jelölje ezeket A, B és C. Az összes lehetőség ekkor lényegében az összes különböző számú (esetünkben egy, kettő és három) elemből álló kombináció képzését teszi szükségessé: A, B, C, AB, AC, BC, ABC.

Első példánkat vegyük a fizika tananyagából. A tankönyvben szerepel egy feladat, amely az iránt érdeklődik, milyen okai lehetnek annak, ha az áramkörbe bekapcsolt izzó nem világít. Kis átalakítással ebből olyan feladatot konstruálhatunk, amely egyben a kombinatív képességet is fejleszti. A tanulók valószínűleg sokféle okot felsorolnak. Ezek közül válasszunk ki hármat. Tegyük fel, hogy a hibának a következő okai lehetnek: elszakadt a vezeték, kimerült az elem, kiégett az izzó. Mi lehet a helyzet, ha az izzó nem világít! Lehet, hogy csak egy ok idézi elő, de lehet, hogy egyszerre több hibaalkatrész is van. Soroljuk fel az összes lehetőséget! A következő esetek adódnak:

egy ok: szakadt vezeték, kimerült elem, kiégett izzó;

két ok: szakadt vezeték és kimerült elem, szakadt vezeték és kiégett izzó, kimerült elem és kiégett izzó;

három ok: szakadt vezeték, kimerült elem és kiégett izzó.

A konkrét feladat egyébként annak a tudatosítására is alkalmas, hogy valamilyen jelenséget több, egymástól független ok külön-külön is előidézhetsen. Ámde ha egy ok önmagában is kiválthatja a megfigyelt jelenséget, még nem biztos, hogy nem áll fenn egyszerre több ok is. A feladat által vázolt szituáció például nagyon is valós problémát modellez: hogyan lehet biztosan megtalálni a hibás alkatrészt (alkatrészeket). Nyilván hibát követünk el, ha kicseréljük az elemet, és ha ezután az izzó mégsem világít, akkor úgy gondolkodunk, hogy biztos nem az elem volt rossz és visszatesszük az eredetit, majd folytatjuk a hiba keresését. Bonyolultabb esetben a hibát valóban csak szisztematikus kereséssel lehet felderíteni.

Második példánk a fizikához és a kémiához egyaránt kapcsolható. Milyen halmazállapotban találkozunk a környezetünkben levő anyagokkal. Soroljuk fel, milyen lehetőségek vannak, mondjunk rá példákat! (A szaktárgyi probléma itt is a „miért”-ekhez kapcsolódhat.)

Egyféle halmazállapotban: csak szilárd, csak folyékony, csak gáz;
kétféle halmazállapotban: szilárd és folyékony, szilárd és gáz, folyékony és gáz;

háromféle halmazállapotban: szilárd, folyékony és gáz.

A harmadik példát ugyancsak a kémiából vesszük. Az egyik leckében a tanulók megtanulják, hogy a cukor alkotóelemei a szén, a hidrogén és az oxigén. Feltesszük a kérdést, milyen összetételű anyagokat lehetne gyártani cukorból kiindulva. Vegyük sorra!

Egyféleből: szén, hidrogén, oxigén;

kétféleből: szén + hidrogén, szén + oxigén, hidrogén + oxigén;

háromféleből: szén + hidrogén + oxigén.

A fenti összeállításokhoz a továbbiakban lehet olyan példákat felsorolni, amelyek összetétele megfelel az egyes kombinációknak.

A KOMBINATÍV KÉPESSÉG FEJLESZTÉSE A KÜLÖNBÖZŐ TANTÁRGYAKBAN

Az előző példákat főleg a fizika és a kémia tantárgyak területéről választottuk, hasonló feladatokat azonban minden tantárgyhoz lehet készíteni. Különbségek azért természetesen vannak. Az elemzett tananyagok között tapasztalataink szerint talán a legfontosabb különbség, hogy néha egészen látható módon vannak jelen a műveletek, máskor rejtetten, csak elemzéssel felszínre hozhatóan, megint másutt viszont csak lehetőséget kínál a tananyag valamely pontja arra, hogy egy feladatot konstruáljunk. A négy elemzett tantárgy közül a legtöbb természetes fejlesztő lehetőség a fizika és a kémia tantárgyak keretében adódott, a környezetismeretben inkább csak lehetőséget találtunk a feladatok beillesztésére, míg a legtöbb munka a nyelvtan esetében szükséges ahhoz, hogy jól strukturált feladatokat kapjunk.

A kémia és a fizika tantárgyak között is vannak érdekes különbségek. Így például a tananyagban kínálkozó legtermészetesebb feladathelyzetek számbavételével kiderült, hogy a kémiában a variációk, a fizikában pedig a kombinációk fordulnak elő nagyobb számban. (Az aránytalanságokat természetesen a további feladatok elkészítése során lehet korrigálni.) A kémia és a kombinatív műveletek kapcsolata egyébként már Piaget és munkatársai munkáiban is megvolt: kísérleteik során a logikai műveleteket egységbe foglaló kombinatív szerkezetet éppen egy kémiai probléma segítségével vizsgálták. Folyadékok segítségével egy sajátos színreakciót állítottak elő, majd arra kérték a kísérleti személyeket, hogy a négy rendelkezésükre bocsátott folyadék segítségével hozzák létre ugyanazt a szint. Ezt csak a kombinációk szisztematikus végigpróbálásával lehet biztosan megtenni (l. *Inhelder B.—Piaget, J.*, 1984).

Mivel a kémia és a fizika tantárgyak köréből vett példákat az előzőekben már bőven idéztünk, nézzünk most néhányat a környezetismeret, illetve a nyelvtan tananyagából. A halmazok Descartes-féle szorzatának képzésére mutatunk be mindkét tantárgyból példákat, mivel ennek a műveletnek a szerkezete a legáltalánosabb, a fejlődése a legkorábban indult meg, s ennek a műveletnek a későbbi differenciálódásával alakulnak ki a további kombinatív műveletek. A művelet esetében a két elemből párok képzésének a képessége viszonylag gyorsan és magas színvonalon kialakul, ugyanakkor a három vagy több elemből készítendő összeállításokkal a tanulók jelentős részének még 17 éves korban is nehézségei vannak. A következő feladatok egyben arra is példát szolgáltatnak, hogyan lehet ugyanarra a műveletre kevesebb és több elemet kombináló feladatot készíteni, és ezáltal a kevés elemre már működő struktúrák mennyiségi általánosítását segíteni, bonyolultabb esetekre is kialakítani.

A negyedikes környezetismeret tananyagának az elején találkozunk az irányok megadásának problémájával. Soroljuk fel, milyen irányokat lehet a jobbra, balra, fent, lent szavakból képezett párokkal megadni! A következő lehetőségek adódnak:

jobbra fent
jobbra lent

balra fent
balra lent

Ezt a feladatot fejleszthetjük tovább, ha az elől és a hátul irányokat is használhatjuk. Ekkor már háromelemű összeállításokat kell képezni. Ezeket rendezetten például a következőképpen sorolhatjuk fel:

elől jobbra fent
elől jobbra lent
elől balra fent
elől balra lent

hátul jobbra fent
hátul jobbra lent
hátul balra fent
hátul balra lent

További játékos feladat lehet, ha azt kérjük, hogy mindezt rendezetten sorolják fel a tanulók, csak most a balra lent hátul iránnyal kezdjük. (Esetleg mindig más mondja a következőt.) Ez már azt is szükségessé teszi, hogy a felsorolás rendjét is felismerjék.

A nyelvtan tanulásának egyik eleme az igeragozás. Ezt az anyanyelvén szinte mindenki megtanulja. Az egyes esetek felsorolása mögött egy kombinatorikai szerkezet van, amely azonban nem általánosítódik kellő mértékben. Egy kételemű halmaz (egyes szám, többes szám) és egy három elemű halmaz (1. személy, 2. személy, 3. személy) elemeit kell összepárosítani minden lehetséges módon, és így áll elő a jól ismert séma, amely szerint felsoroljuk az egyes eseteket:

egyes szám 1. személy
egyes szám 2. személy
egyes szám 3. személy

többes szám 1. személy
többes szám 2. személy
többes szám 3. személy

E szerint a szerkezet szerint ragozzuk a különböző igéket (állok, állsz, áll, állunk stb.). Ha a három időt is számításba vesszük, egy újabb háromelemű halmazt kapunk. Így most már a (múlt idő, jelen idő, jövő idő) \times (egyes szám, többes szám) \times (első személy, második személy, harmadik személy) halmazok háromelemű összeállításai jelölik ki az egyes eseteket. A felsorolást most megadhatjuk a múlt idő egyes szám első személy-től indulva a jövő idő többes szám harmadik személy-ig haladva. (Például álltam, álltál, állt, álltunk, ..., állni fognak.)

A fenti felsorolásokat a tanulók kiválóan el tudják mondani, a szerkezet azonban mégsem áll össze egésszé, mivel a három időből álló teljes rendszer a három időbeli szeletre bontható, amelyeket önmagukban is, valamint egymás mellé helyezve is tudnak a tanulók. Hogy ez nem egyezik meg a teljes rendszer (a háromdimenziós tömb) együttlátásával, arról meggyőződhetünk, ha azt kérjük, hogy folytassák például az álltam, állok, állni fogok, álltunk, ... sort, vagy az álltam, álltunk, állok, ... sort. Itt is „szeletekre” bontjuk az eredetileg háromdimenziós tömböt, csak a megszokottól eltérő módon. Az ilyen felsorolások segítik a szerkezet általánosítását, ezért jól felhasználhatók a kombinatív műveletek fejlesztésére. Tovább bővíthetjük a rendszert, vagy más típusú feladatokat készíthetünk az alanyi és tárgyias ragozás bevonásával. Idegen nyelvekben, ahol több igeidő van, még bonyolultabb struktúrákat gyakoroltathatunk. De összekapcsolhatjuk, kombinálhatjuk az

ige- és főnévragozást is. Talán nem kell bizonyítani, ezek a feladatok sem csak a kombinatív műveleteket fejlesztik, hanem a nyelvtanulás céljait is szolgálják.

A tanórákon alkalmazva, a tantárgyi problémákhoz kapcsolódva természetesen sem a kombinatív képességről, sem a műveletekről, s ugyanígy a variációkról és a kombinációkról sem kell szót ejtenünk. Magát a feladatot kell úgy megfogalmaznunk, hogy az csak a köznyelvet és a tantárgy szaknyelvét használja.

A felsorolásokat a tanulók — attól függően, hogy milyen fejlettségűek a kombinatív műveletek rendszere — ötletszerűen, rendezetlenül, részben vagy teljesen rendezetten adják meg. A fejlődést éppen a felsorolások rendszereinek kialakulása jelenti. Csak akkor lehetünk ugyanis biztosak abban, hogy az összes esetet megtaláltuk, ha van valamilyen rendszerünk, amelyben minden egyes összeállításnak megvan a helye. Csak így tudunk megbizonyosodni arról, hogy minden lehetséges összeállítást elkészítettünk, és nem csináltunk feleslegességeket.

*

A rövid terjedelemben bemutatott néhány feladat természetesen nem méríti ki mindazt a sokféle lehetőséget, amelyet az általános iskolai tananyag kínál a kombinatív képesség fejlesztésére. Azt azonban talán sikerült illusztrálni, hogy megérték a feltételek annak az elgondolásnak a jelenkor színvonalán történő megvalósítására, amelyet *Herbart* 150 évvel ezelőtt (1835-ban megjelent könyvében) a következőképpen fogalmazott meg: „A kombinálás — amit általában teljesen elhanyagolnak, mégpedig helytelenül — a legkönnyebb és sok mindent megkönnyítő gyakorlatok közé tartozik, s éppen a gyermekeknek való. Azzal kell kezdeni, hogy két tárgy megváltoztatja (jobbra és balra, lent és fent, elől és hátul) elfoglalt helyzetét. A következő lépés az, hogy három tárgyat hányféleképpen lehet (egy vonalban) elhelyezni. Igen könnyű kérdés, hogy hány pár telik ki bizonyos számú dologból. Hogy mennyire haladjunk, azt a körülményeknek kell meghatározniuk. Csak betűket ne helyezgessünk ide-oda, kombináljunk és variáljunk, hanem tárgyakat és magukat a gyermekeket. Mindezt részben látszólag játszva kell megtanítani.” (*Herbart, J. F., 1932*).

IRODALOM

- Csapó Benő* (1979): A kombinatív képesség és értékelésének feltételei. Acta Univ. Szeg., Series Specifica Paedagogica, JATE, Szeged.
- Csapó Benő* (1983): A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálata 14 éves tanulóknál. Magyar Pedagógia, 1. sz.
- Csapó Benő* (1984): A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése 10—17 éves korban. Kézirat, Szeged.
- Csapó Benő*: (1987): A gondolkodás műveleti képességeinek fejlesztése az iskolai tantárgyak keretében. Pedagógiai Szemle, 7—8. sz.
- Herbart, J. F.* (1932): Pedagógiai előadások vázlat. Pécsi Egyetemi Könyvkiadó és Nyomda.
- Inhelder, B.—Piaget, J.* (1984): A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Bp.
- Nagy József* (1987): Rendszerezési képesség. Gondolkodási műveletek. Akadémiai Kiadó, Bp. Előkészületben.